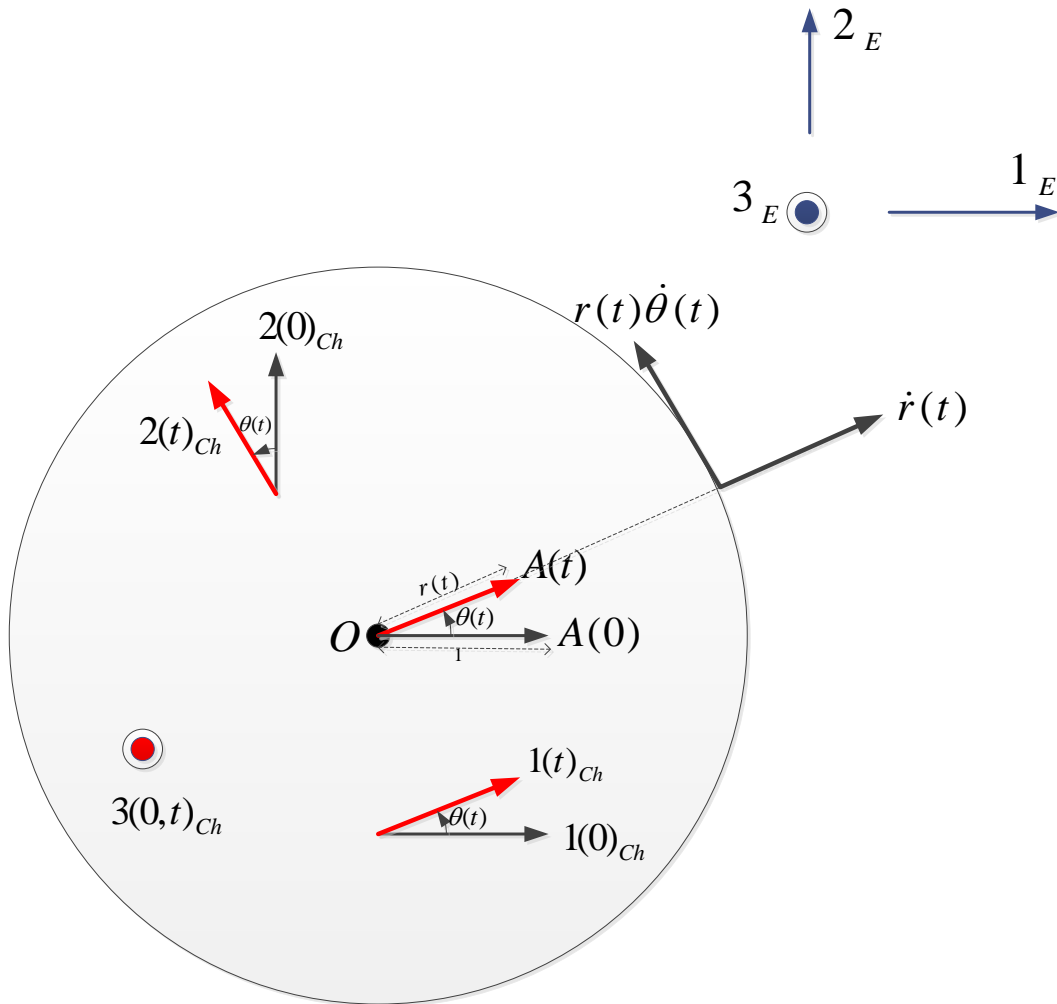


مسئله‌ای راجع به سرعت از دید دو دستگاه ، سرعت دورانی بین دو دستگاه

مسئله‌ی چرخ و فلک:

شکل زیر را در نظر بگیرید که در آن چرخ و مرکز آن و نقطه دیگری که نماینده چیزی است که روی چرخ در حال حرکت شعاعی است، نشان داده شده است.



فرض کنید در شکل فوق 1_E ، 2_E و 3_E محورهای دستگاه چسبیده به زمین باشند. دایره‌ای که در شکل فوق مشاهده می‌کنید، نگاهی از بالا به یک چرخ و فلک در حال حرکت است. محورهای دستگاه چسبیده به این چرخ در لحظه‌ی اول $1(0)_{Ch}$ ، $2(0)_{Ch}$ و $3(0)_{Ch}$ می‌باشند و در لحظه‌ی t ، $1(t)_{Ch}$ ، $2(t)_{Ch}$ و $3(t)_{Ch}$ می‌باشند.

همانطور که در شکل مشاهده می‌کنید همواره راستای محور سوم زمین و چرخ نسبت به زمان تغییر نکرده است. فرض کنید کودکی در لحظه‌ی ابتدایی در $A(0)$ به فاصله واحد از نقطه‌ی O قرار داشته باشد و در لحظه‌ی t در $A(t)$ به فاصله‌ی $r(t)$ از O قرار داشته باشد و البته هم‌راستا با محور ۱.

• حال ${}^{Ch}r_{OA}(t)$ و ${}^E C(t)$ را بر حسب $r(t)$ و $\theta(t)$ بدست آورید.

• پاسخ:

$${}^{Ch}r_{OA}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$${}^E C(t) = \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & -\sin(\theta(t)) & 0 \\ \sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

با توجه به شکل کاملاً مشخص است که ${}^{Ch}r_{OA}(t)$ تنها در راستای اول دستگاه چرخ، صفر نیست. این مقدار غیر صفر نیز همان $r(t)$ است. به بیان دیگر ناظر روی چرخ همواره تنها در راستای محور اول برای کودک مولفه می‌بیند.

• با استفاده از نتیجه‌ی بخش قبل ${}^E r_{OA}(t)$ را بر حسب $r(t)$ و $\theta(t)$ بدست آورید.

• پاسخ:

$${}^E r_{OA}(t) = {}^E C(t) {}^{Ch}r_{OA}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \cos(\theta(t)) \\ r(t) \sin(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ همانطور که تا این‌جا مشاهده نمودید بیان یک بردار ممکن است در یک دستگاه بسیار ساده ولی در دستگاه دیگر بسیار پیچیده باشد.

• زین پس D را به معنی سرعت نسبت به زمان تعریف می‌کنیم. حال $D {}^{Ch}r_{OA}(t)$ و $D {}^E r_{OA}(t)$ را بدست آورید.

• پاسخ:

$$D^{Ch} \underline{r}_{OA}(t) = \begin{pmatrix} \frac{dr(t)}{dt} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D^E \underline{r}_{OA}(t) = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \\ \dot{r}(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix}$$

در این جا می توان به چند نکته ی مهم اشاره کرد:

✓ سرعت بردارها از دید دستگاهها را به راحتی، ابتدا با بیان نمودن بردارها در آن دستگاه و سپس مشتق گیری نسبت به زمان می توانیم بدست آوریم.

✓ اگر دستگاهها از دید یکدیگر نسبت به زمان در حال دوران باشند، سرعت هایی که از یک بردار می بینند می تواند فرق داشته باشد.

• مال بردار سرعت دورانی دستگاه چرخ را نسبت به دستگاه زمین معرفی نمایید. سپس آنرا در دستگاههای چرخ و زمین بیان کنید یعنی: ω_{ECh}^E ، ω_{ECh}^{Ch} را بدست آورید.

• پاسخ:

برای این منظور لازم است ابتدا برای یک فاصله زمانی کوچک، ΔCh_1 و ΔCh_2 و ΔCh_3 را از دید ناظر E در نظر گرفته نمایش دهید. سپس سعی کنید بردار مشترک \underline{K} بی که دوران حول آن، هم زمان هر سه تای $Ch_i(t)$ ها را به $Ch_i(t + \Delta t)$ ها می برد، یافته و معرفی کنید. روشن است که حتماً زاویه مربوطه را نیز یافته اید!

نتیجه: بردار دوران مربوط در این مثال همان محور E ۳ و یا Ch ۳ است که در این مثال یکی اند! پس:

$${}^{E,Ch} \omega_{ECh} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\theta}(t) \end{pmatrix}$$

✓ سه تایی $D^E \underline{r}_{OA}(t)$ در حقیقت بیان سرعت بردار $\underline{r}_{OA}(t)$ از دید زمین (در همان دستگاه زمین) می باشد که البته از این پس خود بردار (و نه بیانش در یک دستگاه) را به صورت $D_E \underline{r}_{OA}(t)$ نمایش می دهیم. توجه کنید که این سرعت $(D_E \underline{r}_{OA}(t))$ هنوز برداری بوده و آن را در هیچ دستگاهی بیان نکردیم. با بیان نمودن آن در هر دستگاهی به آن ماهیتی عددی می دهیم. به عبارت دیگر سرعت از دید دستگاه ماهیتی برداری دارد که عددی شدن آن بستگی به دستگاهی دارد که در آن بیان می شود.

✓ $D^E \underline{r}_{OA}(t)$ به این معنی است که زمین سه عدد را می دیده و سپس از آن مشتق گرفت و $(D_E \underline{r}_{OA}(t))$ به این معنی است که زمین تغییرات برداری را می دیده و بعد آنچه دیده را در دستگاه خودش بیان کرده است. به این ترتیب روابط زیر برقرار است.

$${}^E(D_E \underline{r}_{OA}(t)) = D^E \underline{r}_{OA}(t)$$

$${}^{Ch}(D_E \underline{r}_{OA}(t)) \neq D^E \underline{r}_{OA}(t)$$

• با استفاده از توضیحات داده شده، سرعت از دید دستگاه زمین و بیان شده در دستگاه چرخ یا $(D_E \underline{r}_{OA}(t))$ را بدست آورید.

• پاسخ:

$${}^{Ch}(D_E \underline{r}_{OA}(t)) = {}_E^{Ch} C^E (D_E \underline{r}_{OA}(t)) = {}_E^E C^T D^E \underline{r}_{OA}(t)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta(t)) & \sin(\theta(t)) & 0 \\ -\sin(\theta(t)) & \cos(\theta(t)) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \cos(\theta(t)) - r(t) \dot{\theta}(t) \sin(\theta(t)) \\ \dot{r}(t) \sin(\theta(t)) + r(t) \dot{\theta}(t) \cos(\theta(t)) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{r}(t) \\ r(t) \dot{\theta}(t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

✓ از همین رو مولفه $\dot{r}(t)$ سرعت مماسی و به مولفه $r(t) \dot{\theta}(t)$ سرعت شعاعی می گوئیم. در حقیقت سرعت، جمع برداری این دو سرعت است (این مولفه ها در شکل ابتدای جلسه نشان داده شده اند). ملاحظه کنید که بیان سرعت از دید زمین، در دستگاه چرخ چقدر ساده تر از بیان همان، در دستگاه زمین است.

✓ موضوعات این جلسه و جلسه ی قبل از اساسی ترین مسائل سینماتیک هستند که در مراجع موجود تأکید و تشریحی بر آنها نشده است.

✓ به عنوان یک نمونه بسیار کاربردی و روزمره ، دقت کنید که از دید ما که روی زمین هستیم خورشید در حال دوران است و از دید خورشید، ما در حال دوران هستیم لذا سرعتی که ما روی زمین از جابجایی‌ها می‌بینیم با سرعتی که خورشید از همین جابجایی‌ها می‌بیند فرق دارد و البته به همین ترتیب شتابی که ما روی زمین می‌بینیم با شتابی که خورشید می‌بیند فرق دارد.

✓ دقت کنید که ما ادبیات دقیقی برای دوران یک بردار نسبت به یک دستگاه ایجاد نکرده‌ایم که بتوانیم بر اساس آن دوران بردار خورشید زمین را نسبت به دستگاه زمین بیان کنیم. لذا بیانی که در بند بالا شد خالی از اشکال نیست. اما از طرفی چون ادبیات دقیقی را برای دوران بین دو دستگاه ایجاد کرده و در دست داریم، ما در آزمایش سایه‌ها سعی کردیم دستگاهی را به نام خورشید-زمین معرفی کنیم که دوران خورشید نسبت به زمین و یا برعکس، بتواند دقیق به صورت دوران بین دو دستگاه بیان شود.